もう一度学ぶ電磁気学の世界

第13回 パソコンによるコイルの設計支援

小暮裕明

ボードの記事　ビギナーズ

13.56MHz用RFIDシステムの通信は，二つのコイルの結合係数や伝送効率で評価できることがわかりました．しかし，電気回路問題として解くためには，最終的にコイルのL（自己インダクタンス）やM（相互インダクタンス）の正確な値を得る必要があります．自由空間では，電磁気学の古典的な方法でこれらの値を計算できます．ただし，実際に使われているコイルはさまざまな物体の近くに置かれるため，すべての環境を考慮した値を得る必要があります．こうなると手計算はできませんから，パソコンの力でコイルの設計を支援する方法が現実的です．

（筆者）

1．さまざまなコイルに適した方法

● コイルの磁界と無限長ソレノイド

まず線状電流による磁界についておさらいしておきます．**図1**のように無限に長い導線に電流I（A）が流れているとき，エルステッドが発見した磁界は，点線で示す磁力線で表されました（本誌2004年2月号，pp.119-124の連載第1回を参照）．磁界は半径r（m）の円周上で大きさH，向きは円の接線方向になります．これをアンペアは次の式で表しました．

$$\oint_C H \cdot ds \propto I \quad \cdots\cdots (1)$$

ここで$\oint$は一つの閉曲線に沿って積分する記号，$\propto$は比例関係を表す

式(1)は，磁界に関するアンペアの周回積分の法則と呼ばれています．比例定数を1にするように磁界の単位をとれば，

$$\oint_C H \cdot ds = I \quad \cdots\cdots (2)$$

となります．このとき磁界Hの単位をA/m（アンペア・パー・メートル）と名づけます．

式(2)から，**図1**の電流Iは$2\pi rH$になりますから，

$$H = \frac{I}{2\pi r} \ [\mathrm{A/m}] \quad \cdots\cdots (3)$$

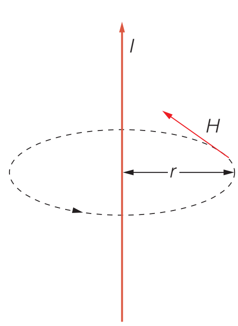


図1
無限長の線状電流Iによる磁界H
無限に長い導線に電流I（A）が流れているとき，磁界は半径r（m）の円周上で大きさH，向きは円の接線方向になる．

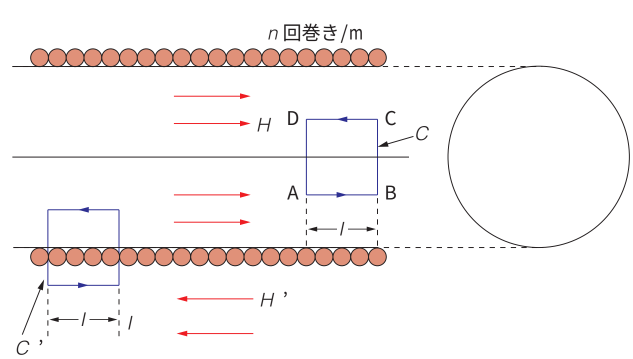


図2　密巻きの無限長コイル（無限長ソレノイド）
導体が接近しているので，1本1本の線路を考えないで，電流がコイルの断面全体に一様に分布していると仮定すると，内部の磁界は均一になる．

図2は密巻きの無限長コイルで，無限長ソレノイド[注1]とも呼ばれています．導体が接近しているので，1本1本の線路を考えないで，電流がコイルの断面全体に一様に分布していると仮定します．

内部の磁界Hは，無限に長いコイルなので，**図2**のように軸に平行になります．長方形の閉曲線Cで式(2)を求めると，BC，DAに沿った積分はゼロなので，

$$\oint_C H\cdot ds = H_{AB}l - H_{CD}l \quad\cdots\cdots(4)$$

ここでH_{AB}，H_{CD}は，AB，CDの磁界の大きさを示す

積分路Cは電流と鎖交しないので，式(4)の周回積分はゼロになり，$H_{AB}=H_{CD}$が成り立ちます．つまり無限長ソレノイド内では，磁界は均一になっていることがわかります．

外部の磁界もやはり均一であることがわかりますが，そのように考えると，無限遠まで均一としなければなりません．無限遠に磁界があるとは考えられませんから，結局は無限長ソレノイドの外部に磁界はないことになります．

図2の積分路C'をとると，

$$\oint_{C'} H\cdot ds = Hl \quad\cdots\cdots(5)$$

ですから，nを1m当たりの巻き数とすれば，電流は表面に沿って単位長当たりnIの密度で流れていると考えられます．式(2)から，$Hl=nlI$となり，磁界Hは，

$$H = nI \ \ [\mathrm{A/m}] \quad\cdots\cdots(6)$$

表1　長岡係数(Nagaoka coefficient)

山田直平ほか；電気磁気学，電気学会，学献社，1973年(第18版)より引用．

2 a/l	K	2 a/l	K	2 a/l	K	2 a/l	K
0	1.000	0.55	0.803	1.10	0.667	2.50	0.472
0.05	0.979	0.60	0.789	1.20	0.648	3.00	0.429
0.10	0.959	0.65	0.775	1.30	0.629	3.50	0.394
0.15	0.939	0.70	0.761	1.40	0.611	4.00	0.365
0.20	0.920	0.75	0.748	1.50	0.595	4.50	0.341
0.25	0.902	0.80	0.735	1.60	0.580	5.00	0.320
0.30	0.884	0.85	0.723	1.70	0.565	6.00	0.285
0.35	0.867	0.90	0.711	1.80	0.551	7.00	0.258
0.40	0.850	0.95	0.700	1.90	0.538	8.00	0.237
0.45	0.834	1.00	0.688	2.00	0.526	9.00	0.219
0.50	0.818					10.00	0.203

a：コイルの半径　l：コイル長

となります．実際に無限長のソレノイドを作ることはできませんが，断面積に比べて十分に長いコイルなら，式(6)のような磁界がコイル内に発生すると考えられます．

● 有限長ソレノイドと長岡係数

磁束鎖交数ϕと電流Iとの間に$\phi=LI$の関係がありました(本誌2005年5月号，pp.133-140の連載第11回を参照)．また，磁束密度Bは，コイルの断面積をSとすれば$B=\phi/S$ですから，単位長当たりn回巻きのϕは，

$$\phi = BS = \mu H\cdot a^2\cdot n \quad\cdots\cdots(7)$$

ここでマクスウェルの構成関係式から$B=\mu H$
(連載第6回を参照)

式(6)を使うと，

$$\phi = \mu\pi a^2 n^2 I = LI \quad\cdots\cdots(8)$$

ですから，単位長当たりのインダクタンスL_0は，式(8)から，

$$L_0 = \mu\pi a^2 n^2 \ \ [\mathrm{H/m}] \quad\cdots\cdots(9)$$

となります．

ここまで，無限長のソレノイドとして解いてきましたが，有限の長さlの部分のインダクタンスは，巻数を$N(=nl)$回として，

$$L = \mu\pi a^2\frac{N^2}{l} \ \ [\mathrm{H}] \quad\cdots\cdots(10)$$

です．実際のコイルは両端が開いていますから，外部にも磁界を生じます．有限の長さlの有限長のソレノイドでは，磁界の強さは，無限長で解いた値より少し弱くなります．その割合を示す係数は，長岡半太郎博士[注2]が計算したので，長岡係数(Nagaoka coefficient，**表1**)と名づけられました．

$$L = K\mu\pi a^2\frac{N^2}{l} \ \ [\mathrm{H}] \quad\cdots\cdots(11)$$

ここでKは長岡係数(表1)

注1：ソレノイド(solenoid)とは，導体を一様かつ密に巻いたコイル．
注2：長岡半太郎(1865年～1950年)は，日本における実験物理学，理論物理学の創始者．磁気ひずみの研究や原子模型長岡モデルの提唱(1903年)は有名．

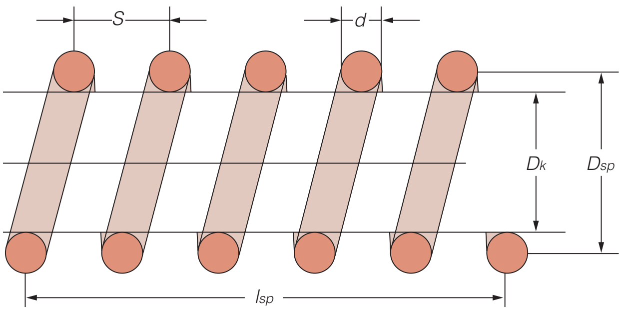


図3　密巻きでないコイル

巻き線に隙間ができるので，そこからコイルの外にも磁束が拡がり，問題が複雑になる．このため，理論だけではなく，測定や経験値から得られる係数で補正する．

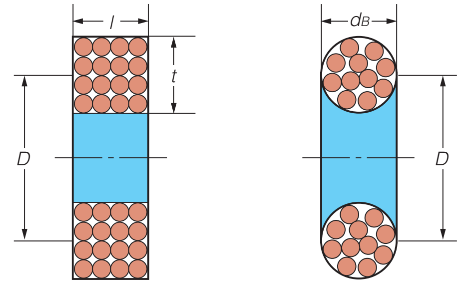


図4　多芯線によるコイル

密巻きでないコイルと同様に，係数で補正する．

この程度の式であれば，パソコンでExcelなどの表計算ソフトを用いて求められるでしょう[注3]．

● コイルの設計と最適化プログラム

図3のような密巻きでないコイルのLを求める式は，電磁気学の教科書には載っていません．巻き線に隙間ができるので，そこからコイルの外にも磁束が拡がり，問題を複雑にします．このため理論だけではなく，測定や経験値から得られる係数で補正したと思われる式が発表されています．**図4**のような多芯線によるコイルも，ある係数を掛けて求める式が発表されています(1),(2),(3)．

これまでLを求める式を得てきましたが，実際には逆にLの目標値が与えられ，それを実現するコイルの寸法や巻き数を設計するのが一般的です．

所望のインダクタンスL(μH)を有するコイル(単位：cm)は，例えば次のような式で表されます．

コイル長　$$l_{sp} = \frac{D_{sp}}{2.2}\left[\left(\frac{w}{6.74}\right)^2 \frac{D_{sp}}{L} - 1\right] \quad\cdots\cdots(12)$$

コイル直径　$$D_{sp} = 22.7L\left[1+\sqrt{1+0.194w^2}\right. \quad\cdots\cdots(13)$$

巻き数　$$w = 10.07\sqrt{0.45+\frac{l_{sp}}{D_{sp}}-0.003} \quad\cdots\cdots(14)$$

これらの式を用いれば，コイル長，直径，巻き数を調整して，所望のLを実現できます．

コイルの品質を表すQ(quality factor)も，設計の重要なパラメータです．QはωLをRで割ったもの(本誌2005年1月号，pp.128-135の連載第8回参照)ですが，次の式でも得られます．

$$Q = G_Z \cdot D_{sp}\sqrt{f}\ \ [\mathrm{MHz}] \quad\cdots\cdots(15)$$

ここでG_zは次の式で求める係数で，**図5**のグラフから読めます．

$$Gz \fallingdotseq 130\cdot\frac{\dfrac{l_{sp}}{D_{sp}}}{1+2.2l_{sp}/D_{sp}} \quad\cdots\cdots(16)$$

これだけパラメータが増えると，最適化する手順をプログラムで実現するのが現実的です．参考文献(1)にはアセンブラで記述されたプログラムが載っていますが，筆者がBasic言語で組み直したものを参考文献(2)および(3)に掲載してあります．

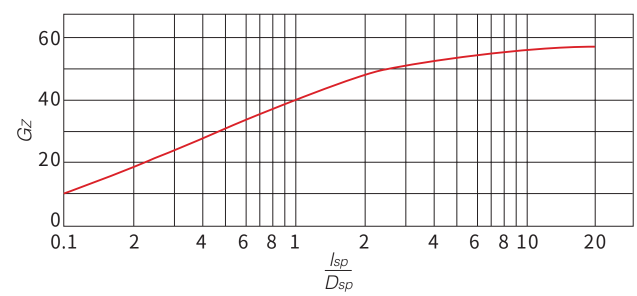


図5　*Gz*を求めるグラフ

注3：下記のWebサイトに式(11)を計算するツールがある．
http://www.mogami-wire.co.jp/cad/coil-01.html

2．コイルの周囲の影響

● コイルの近くにある金属の影響

前項で調べたように，自由空間にあるコイルは，電磁気学の初歩的な手法で解くことができました．しかし，コイルの近くに有限長の金属が一つあるだけでも，問題は一気に難しくなります．

13.56MHz用RFIDシステムは「オサイフケータイ」に採用されています．携帯電話の筐体内は，すでに回路モジュールで埋め尽くされており，新たにコイルを実装する領域は限られています．金属のシールド・ケースとプラスチック・カバーの間に装着するので，コイルの周りに発生する磁界の半分は，すぐ近くの金属表面の影響を強く受けることでしょう．

図6は，前回（本誌2005年6月号，pp.133-140の連載第12回を参照）使用した6回巻きコイルをもとに，その1mm直下に120mm × 80mmの銅板を置いたSonnet[注4]のモデルです．図7はSonnetが出力したSPICEのサブサーキットです．銅板がないモデルで得た$L = 4464$nHが，銅板を置いたことで$L = 1955$nHに大きく変化しました．また，この例ではCとRの変化はわずかでした．

Lが大きく変わったことで，13.56MHzで共振させるために装荷するCの値も設計し直さなければなりません．図8は，米国Sonnet社のDr. Rautioのアイデアによるポートです．Level 1からLevel 0へ上向きにビア（via）を付けるのは前回と同じですが，ポートの付けかたが異なっています．短い平衡線路を設けて，先端に1と－1の内部ポートを付けているのが特徴です．

－1のポートは，1の内部ポートの次に番号2が自動的に

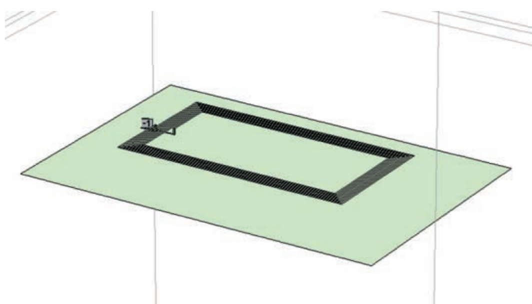


図6　6回巻きコイルの1mm下に120mm × 80mmの銅板を置いたSonnetモデル

前回（本誌2005年6月号，pp.133-140の連載第12回を参照）使用した6回巻きコイルをもとに，その1mm直下に120mm × 80mmの銅板を置いた．

```
   *  Analysis frequencies: 13.3, 14.65 MHz
.subckt 6t_metal_spice_3 1 GND
C_C1  1 GND 1.110575pf
L_L1  1 2 1955.022nh
R_RL1  2 GND 2.164041
.ends 6t_metal_spice_3
```

図7　Sonnetが出力したSPICEのサブサーキット

板を置いたことで$L = 1955$nHに変化した．CとRの変化はわずかである．

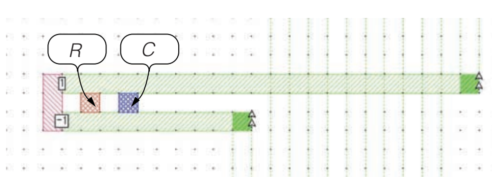


図9　RとCを並列に接続した部分

平衡線路の間に，正方形の金属が二つ接続されているが，それぞれRとCを形成している．

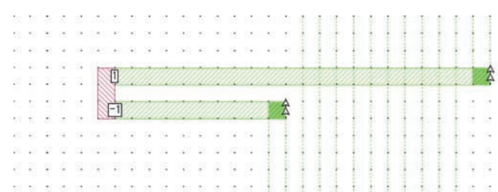


図8　Dr. Rautioのアイデアによるポート

短い平衡線路を設けて，先端に1と－1の内部ポートを付けている．

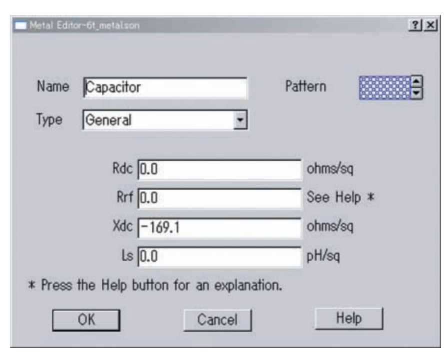


図10　右側の金属の定義

TypeをGeneralにして，Xdcに－169.1 Ω/□を設定している

注4：無料版のSonnet Liteは，本誌2005年7月号のCD-ROMに収録されている．また，Sonnet技研のWebサイト（http://www.sonnetsoftware.co.jp/）からもダウンロードできる．電磁界シミュレーションの使用事例は，参考文献（4）を参照．

割り当てられた後，2番目のポートをダブルクリックして，自動的に割り当てられた2を手動で－1に変更します．両ポートにはさまれたlosslessの小さい金属は，ベースとなるグラウンドと考えればよいでしょう．この構造は，Netlist Projectを使わずに，Geometry Projectだけで共振のためのCを付ける目的で考案されました．

図9は，RとCを並列に接続したモデルです．平衡線路の間に，正方形の金属が二つ接続されていますが，それぞれRとCを形成しています．**図10**は右側の金属の定義です．TypeをGeneralにして，Xdcに－169.1Ω/□を設定しています．これは負のリアクタンス（つまりキャパシタンスC）ですが，形状が正方形ですから，このままで－169.1Ωを表すことになります．

L＝1955nHですから，13.56MHzで共振させるために必要なCは，次の式から計算できます．

$$C = 1/L(2\pi f)^2 \quad \cdots\cdots (17)$$

このときC＝70.5pFになりますから，Xは－1/(2πfC)から得られます．左側の正方形は抵抗Rで，某社のタグICの並列等価抵抗25kΩを想定しており，TypeをRdc/Rrfにして，Rdcに25000Ω/□を設定しています（**図11**）．

● 渦(うず)電流の発生

図12はインピーダンスのシミュレーション結果です．設計したとおり13.56MHzでリアクタンスがゼロになり，共振していることがわかります．抵抗（レジスタンス）は，並列共振なので7kΩと高い値になりました．

金属板が1mmの距離に接近しても，Cの値を再調整すれば13.56MHzで共振が得られることがわかりました．それではこのコイルが送信しているとき，金属板はどうなっているのでしょうか．

コイルに発生する磁界は，自由空間では**図13**のようになっていました．これはMicro-Stripes[注5]による1回巻きのシミュレーション結果ですが，近くに金属板を置くと，

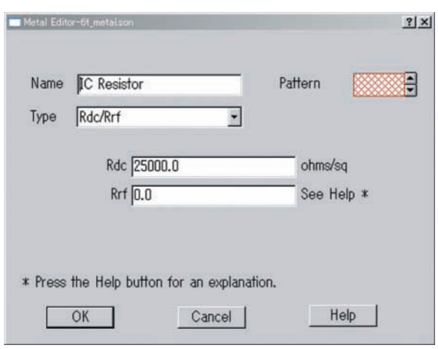


図11 左側の金属の定義
TypeをRdc/Rrfにして，Rdcに25000Ω/□を設定している．

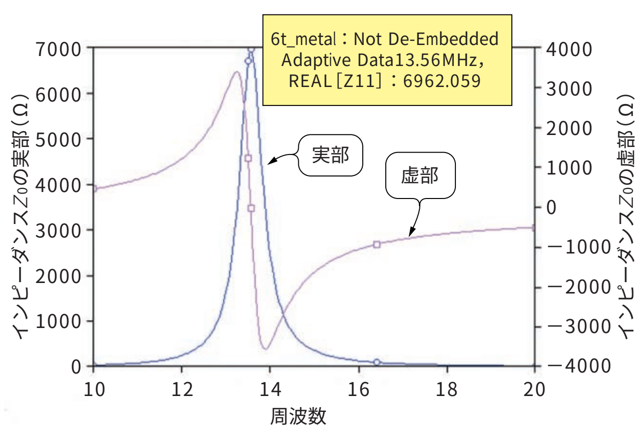


図12 インピーダンスのシミュレーション結果
13.56MHzでリアクタンスがゼロになり，共振していることがわかる．並列共振なので抵抗（レジスタンス）は7kΩと高い．

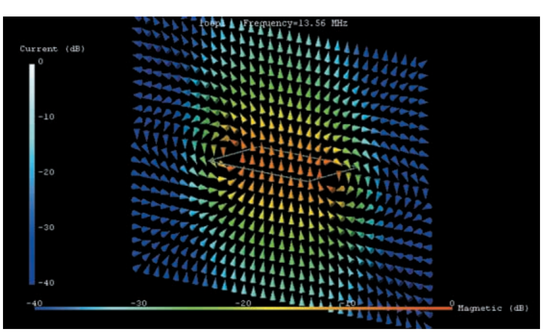


図13 コイルに発生する磁界（自由空間）
Micro-Stripesによる1回巻きのシミュレーション結果．

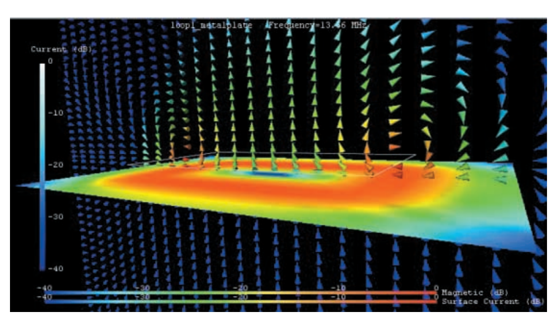


図14 コイルの5mm直下に120mm×80mmの銅板を置いたモデル
わずかな隙間に磁力線が回り込んでいる．

注5：Micro-Stripes（マイクロストライプス）のWebサイトは「http://www.microstripes.com/」

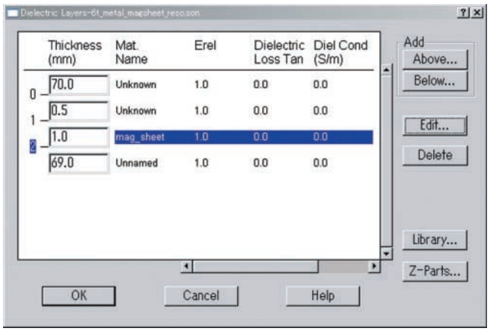


図15　コイルと金属の間の層に磁性体を設定する

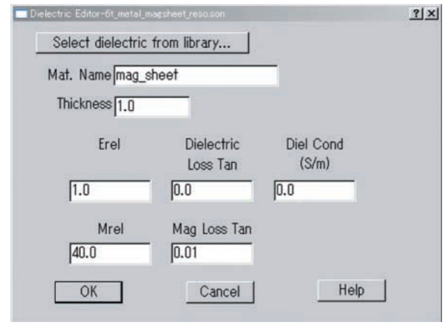


図16　比透磁率とtan δを設定する画面

比透磁率を40，tan δを0.01にしている．

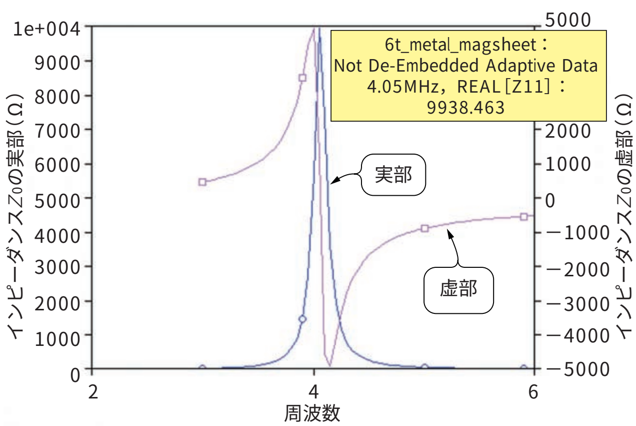


図17　共振周波数は4MHzになった

比透磁率が40ある磁性体の近くにコイルを置けば，共振周波数はかなり低いほうへずれることが予想される．

```
   *  Analysis frequencies: 13.3, 14.65 MHz
.subckt 6t_metal_magsheet_spice_3 1 GND
C_C1 1 GND 1.338613pf
L_L1 1 2 6576.439nh
R_RL1 2 GND 2.402659
.ends 6t_metal_magsheet_spice_3
```

図18　磁性体シートがある場合のSPICEモデル

13.56MHzで共振させるために，C＝19.7pF（X＝－597.3 Ω）に変更する必要がある．

磁界はどのように分布するのでしょうか．

図14は，コイルの5mm直下に120mm×80mmの銅板を置いたモデルです．コイルと金属板の間に，どのような磁界が分布するかを表示するために，5mmを二つのセルで離散化しました．このため，わずかな隙間に磁力線が回り込んでいるようすがよくわかります．磁界ベクトルは金属面に対して平行になりますが，磁界強度が大きい領域に接した金属面は，とくに表面電流が強くなっていることがわかります．

電磁界シミュレータでは，一般に金属の内部は計算されません(4)．しかし，物理現象としては導体内部にも磁束が通過します．高周波電流は表皮効果によって，周波数が高くなるほど導体表面近くを流れます．磁束も表面近くを通過しますが，変化する磁束によって電流の回転（rot）が生まれます．このような閉曲線に流れる電流を，渦電流と呼びます．

これは電磁誘導作用ですが，金属には抵抗がありますから損失を生じ，この損失を渦電流損と言います．渦電流によって発生する熱は，例えば渦電流加熱装置などに利用されています．

● 渦電流損を減らす方法

携帯電話に内蔵したRFIDのタグやリーダのコイルは，渦電流損を軽減することで安定した通信を実現できます．リーダの作った磁界（磁気エネルギー）は，電磁誘導でタグに取り込まれますが，渦電流損が大きいとその量が減ります．また，タグが稼働して磁界を発生する場合も，渦電流損が大きいとリーダに誘導されるエネルギーは減ります．

コイルと近傍の金属間の距離は変えられないので，渦電流損を減らすために，この隙間に磁性体のシートを挟み込む方法が考えられます．そもそもコイルと金属を接触させると，**図14**に示すコイル線を周回する磁界が発生しませんから，わずかであっても隙間を作ることが大事です．

図15は，コイルと金属の間の層に磁性体を設定する画面です．Sonnetの誘電体層は，**図16**のように比透磁率とtan δを設定すると，磁性材の層を表現できます．ここでは一例として，比透磁率を40，tanδを0.01にしてみました．

誘電体には波長短縮の効果（本誌2005年4月号，pp.136-144の連載第10回を参照）がありますが，磁性体にも同様

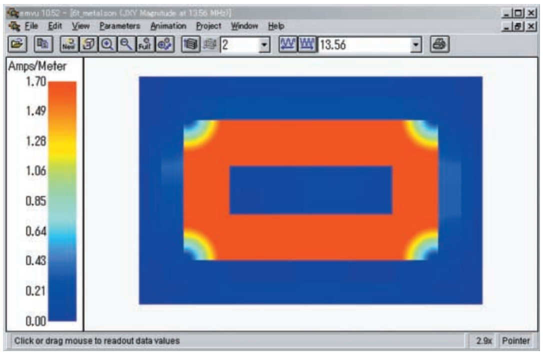


図19　磁性体シートがない場合の金属の表面電流分布(13.56MHz)
使用メモリを減らす目的で，粗いセル(離散化)を使用．

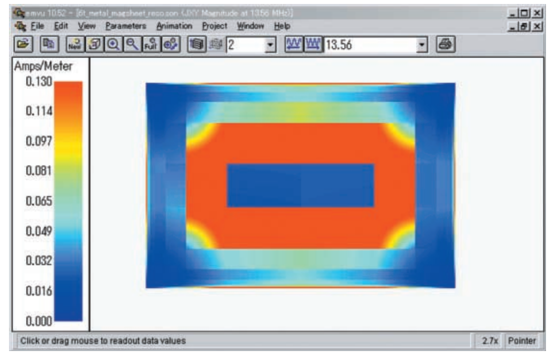


図20　磁性体シートがある場合の金属の表面電流分布(13.56MHz)
磁性体シートがない場合と比べて，最大値は1けた小さくなった．

の効果があります．比透磁率が40ある磁性体の近くにコイルを置けば，共振周波数はかなり低いほうへずれることが予想されます．**図17**に示すように，共振周波数は4MHzになりました．

そこで，再びSPICEモデルを出力してみると，**図18**のように$L = 6576$nH(＝6.6 μH)となり，13.56MHzで共振させるためには，$C = 19.7$pF($X = -597.3\ \Omega$)に変更する必要があります．

携帯電話に内蔵したRFIDタグまたはリーダのコイルを想定したモデルができたので，いよいよ渦電流を調べてみます．**図19**は磁性体シートがない場合の13.56MHzにおける金属の表面電流分布です．また，**図20**は磁性体シートがあるモデルの結果です．左側のスケールは，自動的に最大値を考慮した表示になりますが，前者に比べて後者の最大値は1けた小さくなりました．

渦電流の値が大きければ渦電流損によって失われるエネルギーも大きいので，磁性体シートを置く効果はあります．これは磁性体が内部に磁界をより多く取り込むことによって，金属表面近くに分布する磁界がより少なくなり，結果として渦電流の発生量を少なくするためとも考えられます．また，磁性体シートによってできる隙間には，コイル線を周回する十分な磁界を発生させる効果も期待できます．

● 電磁界シミュレータによる評価

電磁界シミュレータは，13.56MHzのRFIDシステムを評価するために十分役立ちます．コイルを構成する材料の定数をきちんと設定することで，表皮効果や損失，周囲の影響を含んで，マクスウェルの方程式を解いているからです．

Zパラメータを評価することで，タグに発生する起電力が得られます．**図21**は，**図8**の方法を用いてリーダのコイルとタグのコイルをモデリングした例です(5)．上側のコイルがリーダで，タグの縦，横の寸法をそれぞれ2倍に増やしています．リーダのポートを2，タグのポートを1に設定すると，Z_{12}はV_1(ポート1の電圧)とI_2(ポート2の電流)の比ですから，タグの電圧V_{tag}は，

$$V_{tag} = I_{reader} \times Z_{12} \qquad \cdots\cdots(18)$$

となります．リーダのコイルに流れる電流がわかれば，Z_{12}のグラフによってタグに発生する電圧の傾向が把握できることになり，便利です．**図22**はSonnetで求めたZ_{12}のグラフです．オフセットの数字は**図23**に示すように，リーダ・コイルとタグ・コイルを水平方向へずらした距離です．垂直距離は50mmに固定してあります．

オフセットが0mmの場合，真上から見たタグはリーダ・

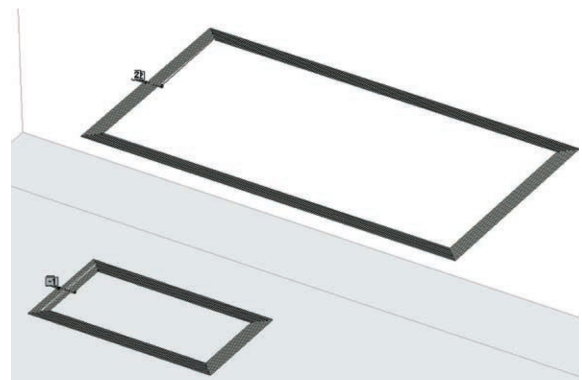


図21　リーダのコイルとタグのコイルをモデリングした例(コイル間距離50mm)
上側のコイルがリーダで，タグの縦，横の寸法をそれぞれ2倍に増やしている．

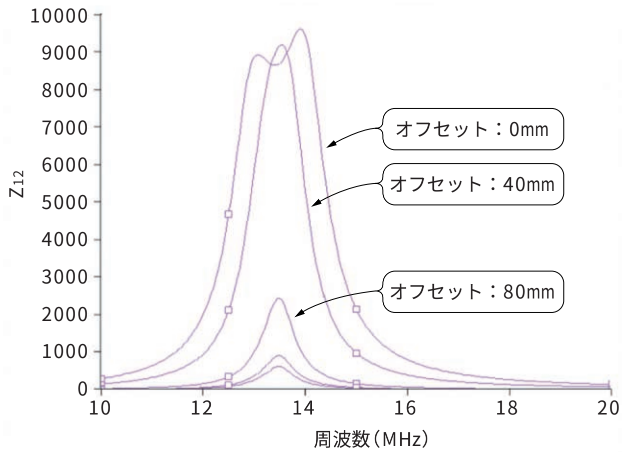


図22　Sonnetで求めたZ_{12}のグラフ
オフセットが0mmの場合，真上から見たタグはリーダ・コイル内に収まる．タグの横が80mmなので，オフセットが40mmになるとタグの半分しか重なっていないが，Z_{12}の値は変わらない．しかし，オフセットが80mmになると，Z_{12}の値は急に小さくなる．

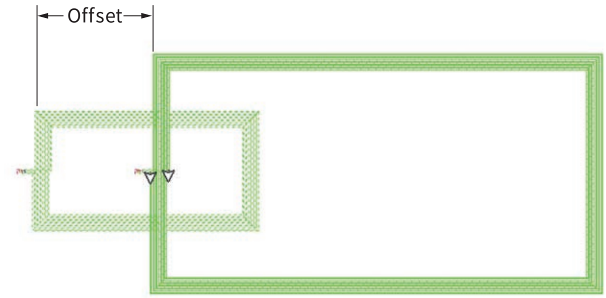


図23　リーダ・コイルとタグ・コイルのオフセット
リーダ・コイルとタグ・コイルを水平方向へずらした距離．

コイル内に収まっています．タグの横が80mmなので，オフセットが40mmになるとタグの半分しか重なっていませんが，Z_{12}の値は変わりません．しかし，オフセットが80mmになると，Z_{12}の値は急に小さくなります．式(18)から，タグに発生する電圧も急激に減り，タグのICを目覚めさせることができなくなるでしょう．

Z_{12}はオフセットが0mmの場合，共振周波数の13.56MHzでやや小さい値になり，中央がくぼんだ双峰特性[注6]を示していることに気をつけてください．両コイルをさらに垂直方向に近づけると，この傾向がより顕著になることがあります．これは同じ周波数(13.56MHz)の共振回路が二つ接近したことで密結合の状態になっているためと考えられます．両コイルを近づけたら通信できなくなったという現象を経験したら，これを疑ってみる必要があります．

まとめ

ソレノイドのように電磁気学の簡単な式で解ける場合もありますが，一般にコイルの周囲には金属などが接近しており，自由空間で解いた値は参考になりません．厳しい実装条件下で使われる13.56MHzのRFIDシステムは，電磁界シミュレータを用いて，周囲の影響をすべて含んだ結果を得る方法が有用です．電気回路ではインダクタンスLを電流の時間変化と誘導される電圧の関係式の比例定数として扱いますが，今回はコイルに発生する磁界をもとに，電磁気学の問題としてもう一度学びました．そろそろ回路の周りに発生する電界や磁界の分布を「想像(イメージ)」できるようになってきたでしょうか？

注6：狭帯域増幅器の複同調回路は，1次側と2次側にLC並列共振回路(同調回路)を用いて，相互誘導結合(または容量結合)させる．結合係数kが1の場合を臨界結合といい，これより小さいと同調回路の周波数特性は単峰形になる．またkが大きいと双峰形となる．これらの現象は，空間に置いたコイル(共振回路)どうしの結合状態にも見られる．

参考・引用*文献

(1) Gerd Janzen；Kurze Antennen, Franckh 'sche Verlagshandlung, W. Keller & Co., 1986.
(2) 小暮裕明；特集 キャパシタンス インダクタンス 装荷アンテナの理論と設計，HAM Journal No.57, pp.35-68, CQ出版社，1988年9・10月号.
(3) 小暮裕明；第3章 短縮アンテナの設計，別冊CQ ham radio バーチカル・アンテナ，pp.91-130, CQ出版社，1994年3月号.
(4) 小暮裕明；電磁界シミュレータで学ぶ高周波の世界，CQ出版社，2003年(第6版).
(5) James C. Rautio；"Using the Sonnet Electromagnetic Analysis to Discover the Secrets of Small Antenna Design for RFID and Bluetooth Wireless Communications", Micro wave Workshops and Exhibition 2002, Nov. 2002.
(以下のWebサイトからMWE2002の資料をダウンロードできる，http://www.sonnetsoftware.co.jp/product/seminar/)

こぐれ・ひろあき
小暮技術士事務所・技術士(情報工学部門)
http://www.kcejp.com/